Les systèmes centrés

I. Généralités :

Le système optique peut-être composé de miroirs plans ou sphériques et / ou, de dioptres plans ou sphériques (une lentille par ex. est composée de deux dioptres dont au moins l'un des deux est sphérique).

On appelle système centré, un système simple équivalent au système optique qui permet :

-de déterminer la marche d'un rayon à la sortie du système optique
-de calculer la position de l'image d'un objet à travers ce système optique

On travaille toujours dans l'approximation de GAUSS, 2 cas peuvent se produire :

-quand un faisceau incident parallèle, converge ou diverge à la sortie du système optique, le système centré équivalent est dit « à foyer ».

-quand le faisceau émergent reste parallèle, le système est dit « afocal ».

II. Caractéristiques : Eléments cardinaux :

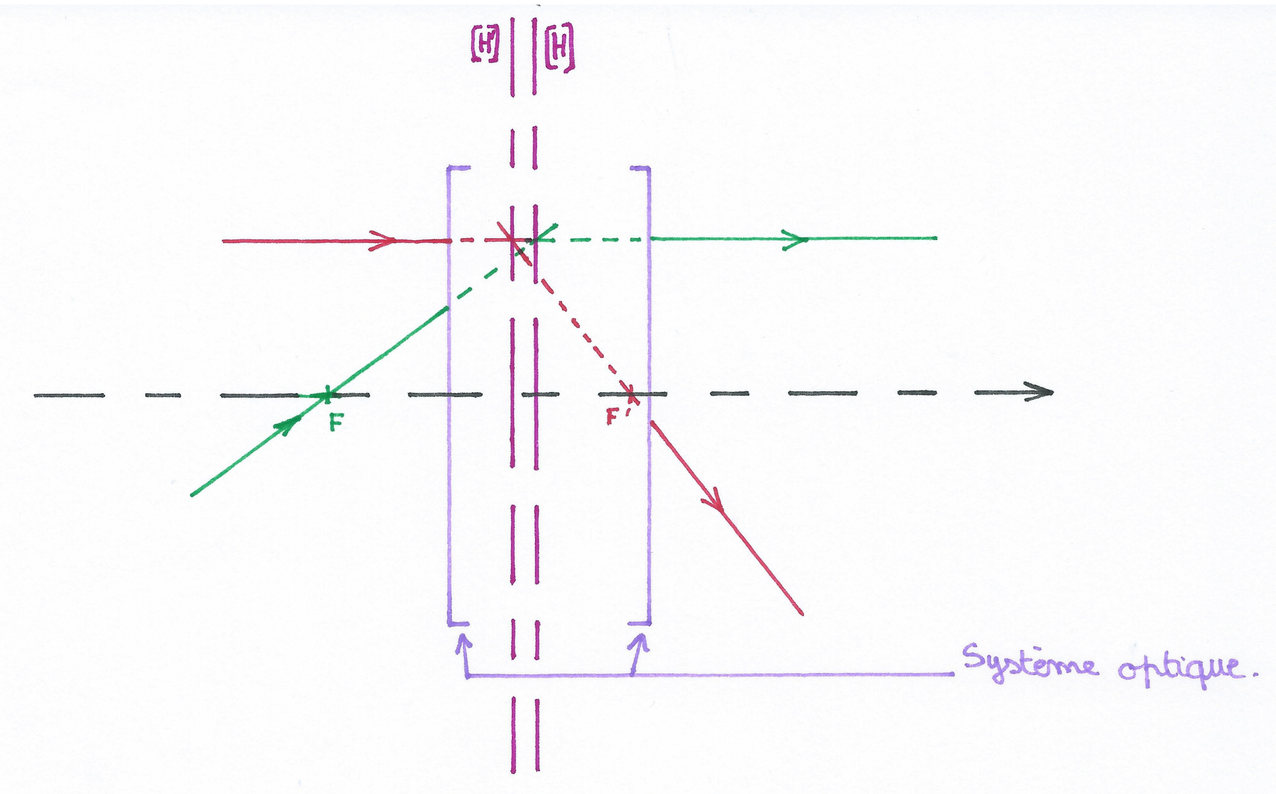
Par définition un rayon parallèle à l'axe optique dans l'espace objet ressort en coupant l'axe optique si le système est convergent. Le point d'intersection du rayon émergeant et de l'axe optique est appelé « foyer principal image » et noté F'.

Si le système est divergent, le rayon parallèle à l'axe ressort en semblant provenir de F' (toujours à l'intersection du rayon émergeant et de l'axe optique).

Par définition un rayon émergeant parallèle à l'axe, dans l'espace image :

-provient du « foyer principal objet » F, si le système est convergent
-correspond à un rayon incident qui semble se diriger vers le foyer F si le système est divergent.
-F est à l'intersection du rayon incident et de l'axe optique
-on appelle « **plan principal image** » **[H']** le plan perpendiculaire à l'axe à l'intersection d'un rayon incident parallèle à l'axe et de son rayon émergent.
-on appelle « **plan principal objet** » **[H]** le plan perpendiculaire à l'axe à l'intersection d'un rayon émergent parallèle à l'axe optique et de son rayon incident.

Exemples :



On appelle éléments cardinaux, l'ensemble de ces 4 positions : [H], [H'], F et F'.

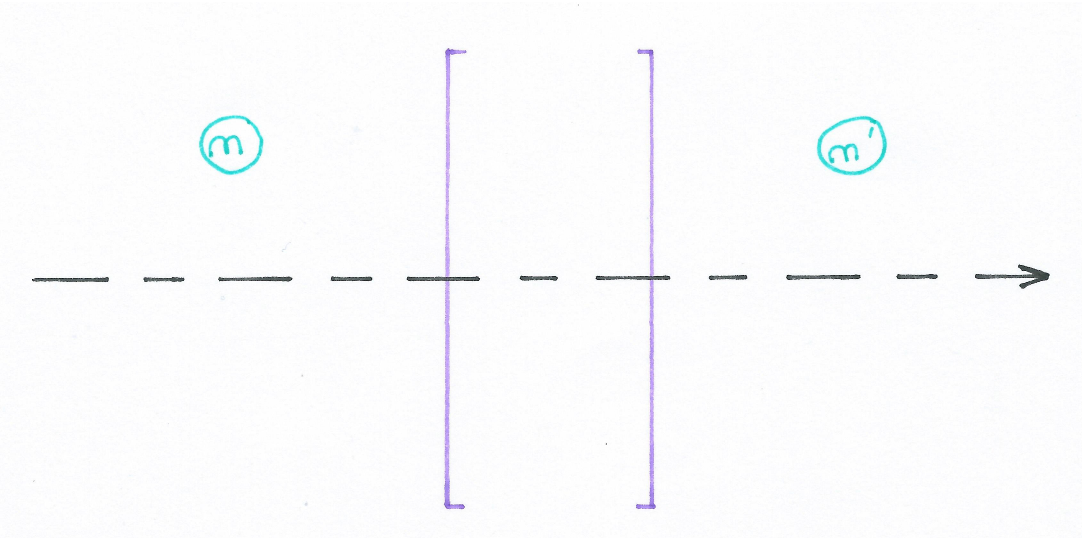
1. Distances focales :

On appelle « **distances focales image** » noté **f'**, la distance algébrique **H'F' ==> f'=H'F'**.
On appelle « **distances focales objet** » noté **f**, la distance algébrique **HF ==> f=HF .**

*Remarques :

f et f' sont toujours de signes opposés.
Si f' est positif, le système est convergent.
Si f' est négatif, le système est divergent.

2. Vergence :



Soit un système optique séparant un milieu objet d'indice **n** d'un milieu image d'indice **n'**.

On appelle « vergence du système », D tel que **$D = n'/H'F' = n'/f'$**

D s'exprime en dioptrie et les distances en mètres.

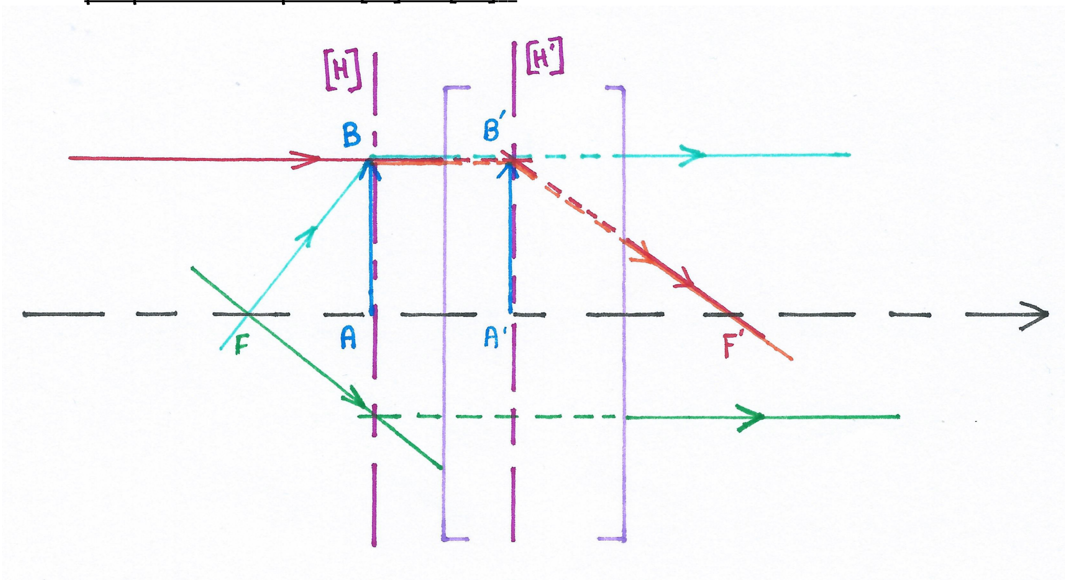
On a également, la relation suivante : **$D = -n/HF = -n/f = n'/f'$**

*Remarques :

Si l'indice d'entrée et l'indice de sortie sont égaux alors seulement à cette condition les distances focales sont égales au signe près.

Si **$H'F'>0$, D est positif**, le système est **convergent**
si **$H'F'<0$, D est négatif**, le système est **divergent**

3. <u>propriétés des plans [H] et [H'] :</u>



Pour obtenir l'image de B', on peut tracer la marche de 2 rayons « émis » pas B. B' sera à l'intersection des 2 rayons émergents.

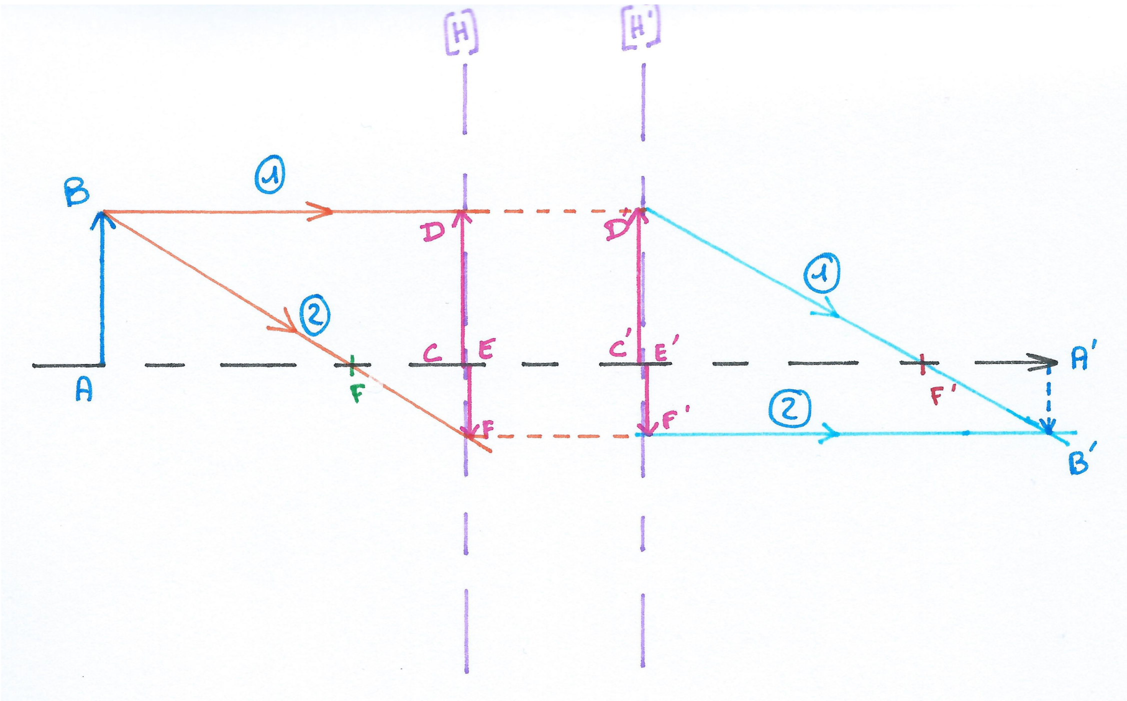
<u>On constate graphiquement :</u>

-B' est sur [H']
-AB = A'B'

Le grandissement G dans ce cas G= A'B'/AB = 1.

On dit que les plans principaux [H] et [H'] sont conjugués de grandissement transversal = à 1.

III. Détermination de l'image d'un objet :



Pour construire l'image d'un objet AB à travers un système centré, on construit la marche de 2 rayons incidents issus de B si AB est réel ou allant vers B si AB est virtuel. L'un de ces rayons est parallèle à l'axe, on cherche son intersection avec le plan [H], il ressort en passant par F' en coupant [H'] à la même hauteur.

Pour le deuxième rayon, on cherche son intersection avec [H], on ressort horizontalement à partir de [H'], à la même hauteur.

L'image finale **A'B'** est déterminée par **l'intersection des rayons émergents**.

IV. Formules de conjugaison et grandissement :

1. Formules de Descartes :

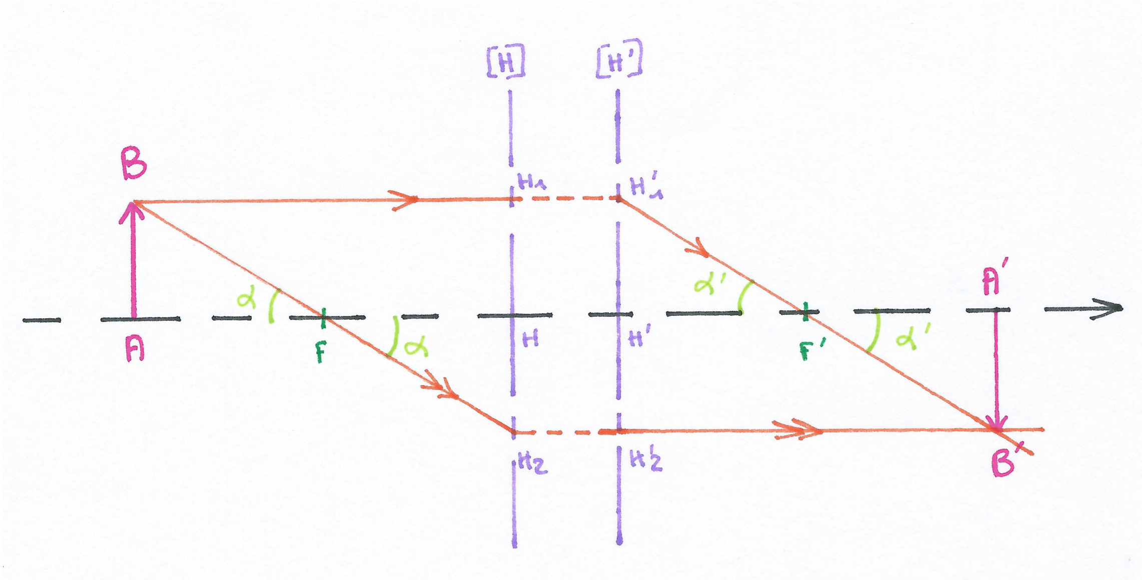
A travers travers tout système centré, les points conjugués A et A' de l'axe sont reliés par :

$$D= n'/H'A' - n/HA$$

Le grandissement transversal G.

$$G= A'B'/AB = n/n' \times H'A'/HA$$

2. <u>Formules de Newton :</u>



G= A'B'/AB

1. Les triangles (FAB) et (FHH_2) sont isomorphes.

$$FH/AH = H_2H/AB$$

$$f=HF \ ; \ H_2H = B'A'$$

$$-f/AF = B'A'/AB \implies A'B/AB = f/AF$$

<u>Ce qui nous donne la formule finale :</u>

$$G=A'B'/AB = -f/FA$$

2. Dans les triangles (F'A'B') et ($F'H'H'_1$)

$$F'A'/H'F' = B'A'/H'H'_1$$

$$H'F' = f'$$

$$H'H'1 = AB$$

$$F'A'/f' = B'A'/AB \implies A'B'/AB = -F'A'/f'$$

<u>Ce qui nous donne la formule finale :</u>

$$G=A'B'/AB = -F'A'/f'$$

<u>L'égalité des grandissements :</u>

G=G ==> relation 1 = relation 2.

$$-f/FA = -F'A'/f'$$

Ce qui nous donne la formule finale :

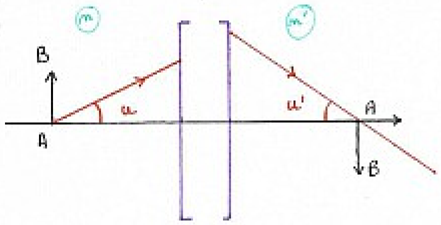
$$\boxed{\frac{n'}{\overline{HA'}} - \frac{n}{\overline{HA}} = D} \qquad \boxed{\gamma = \frac{n}{n'} \times \frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}} \qquad \boxed{\gamma = \frac{-f}{\overline{FA}} \qquad \gamma = \frac{-\overline{F'A'}}{f'}}$$

FA x F'A' = f x f'

C'est la relation de conjugaison de Newton.

V. Relation de Lagrange Helmotz et points nodaux :

1. Relation de la Lagrange Helmotz:



Relation :

$$\boxed{n \times \overline{AB} \times u = n' \times \overline{A'B'} \times u'}$$

u et u' en rad. u et u' suffisament petit c.a.d ds les condit° de GAUSS.

On connait le grandissement transversal

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

↳ On définit le grandissement angulaire.

$$\gamma_\alpha = \frac{u'}{u}$$

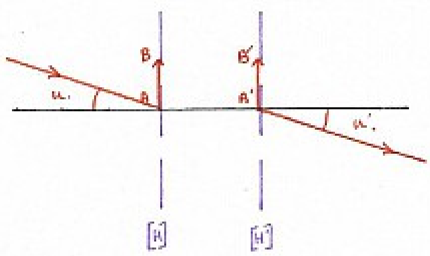
Démonstration :

$$n \times \overline{AB} \times u = n' \times \overline{A'B'} \times u' \longrightarrow \frac{n}{n'} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \times \frac{u'}{u}$$

$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ et $\gamma_\alpha = \frac{u'}{u}$ ce qui donne : $\boxed{\gamma_\alpha \times \gamma = \frac{n}{n'}}$

Application aux plans principaux :

On sait que les plans [H] et [H'] sont conjugués de grandissement transversal = 1 (cf. Définition).



$\gamma_\alpha \times \gamma = \frac{n}{n'}$. $\gamma = 1$ ds ce cas $\gamma_\alpha = \frac{u'}{u}$

$$\frac{u'}{u} \times 1 = \frac{n}{n'}$$

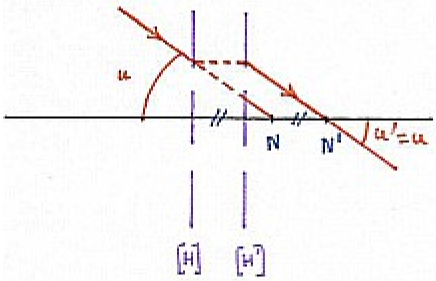
$$\boxed{u' \times n' = n \times u}$$

2. Points nodaux :

Pour un système centré à foyer, il existe 2 points particulier N et N' et appelés points nodaux.

N et N' sont conjugués de grandissement angulaire = 1

$u'/u = 1$ donc $u = u'$

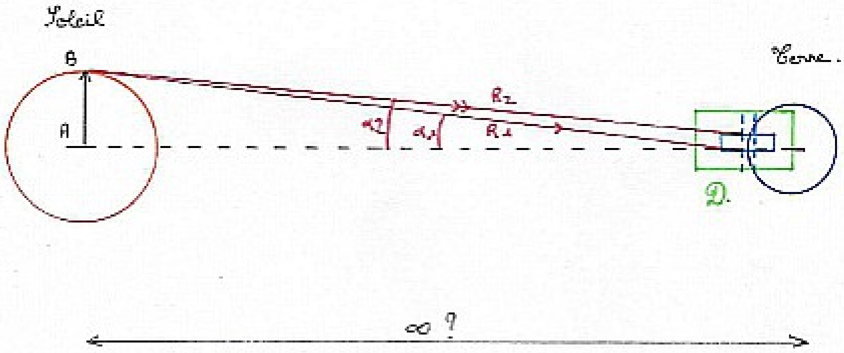


Rayon particulier:

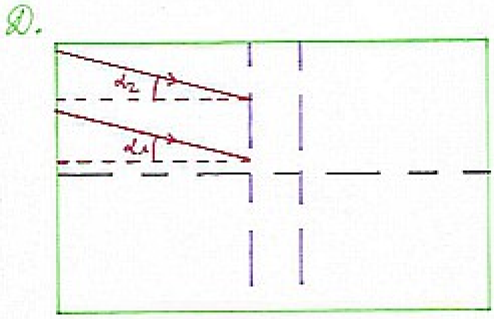
Tout rayon passant par N ou semblant se diriger vers N, ressort en passant par N' ou en semblant provenir de N' avec la m̂ inclinaison.
(rayon emergeant et incident //).

Propriétés :

$\overline{HH'} = \overline{NN'}$	$\overline{FN'} = \overline{HF}$	$\overline{FN} = \overline{H'F'}$



Si la distance entre le système opt. et l'objet est suffisamment grande (∞). Les angles α_1 et α_2 sont extrêmement proches. $\alpha_1 \approx \alpha_2$



On peut considérer que les rayons arrivent // entre eux.

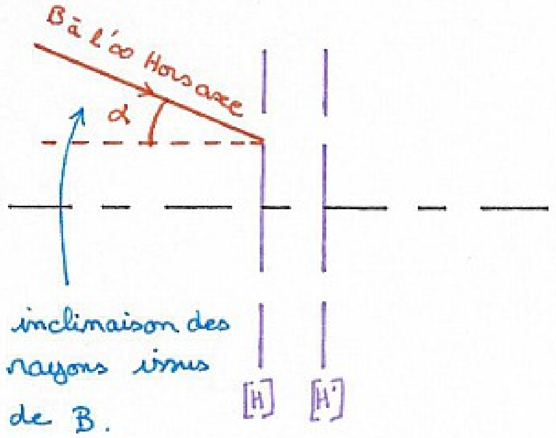
VI. Objet et image à l'infini :

1. Objet à l'infini :

Soit un objet AB à l'infini avec A sur l'axe optique.

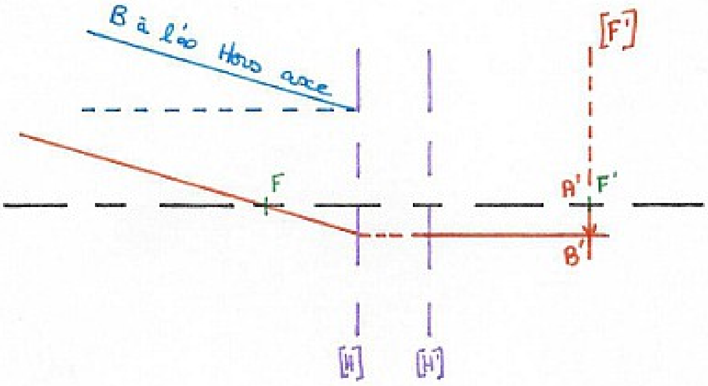
Tous les rayons issus de A arrivent sur le système // à l'axe optique.

Tous les rayons issus de B arrivent sur le système // entre eux, incliné par rapport à l'axe optique.



Propriétés :

L'image d'un objet à l'∞ se forme toujours dans le plan du foyer principal image [F']



On peut vérifier la propriété :

$D = \frac{n'}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}}$ ici AB à l'∞ $\overline{HA} \to \infty \to \frac{n}{\overline{HA}} \to 0$

$D = \frac{n'}{\overline{H'A'}}$ or $D = \frac{n'}{\overline{H'F'}}$, $\overline{H'A'} = \overline{H'F'} \Rightarrow$ A'B' est bien dans le plan [F']

2. Image à l'infini :

Propriété :

Si à la sortie d'un système optique, les rayons issus d'un point objet B, ressortent // entre eux, alors on considère que l'image est à l'infini. Mathématiquement on peut considérer que 2 droites se croisent à l'infini.

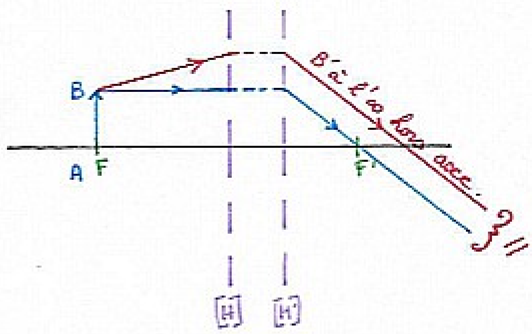
$D = \frac{n'}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}}$ On veut AB à l'∞.

$\overline{H'A'} \to \infty$ $\frac{n'}{\overline{H'A'}} \to 0 \to D = -\frac{n}{\overline{HA}}$ or $D = -\frac{n}{\overline{HF}}$

Donc A est en F.

Propriété :

L'image d'un objet AB placé dans le plan focal objet [F] se forme toujours à l'∞.

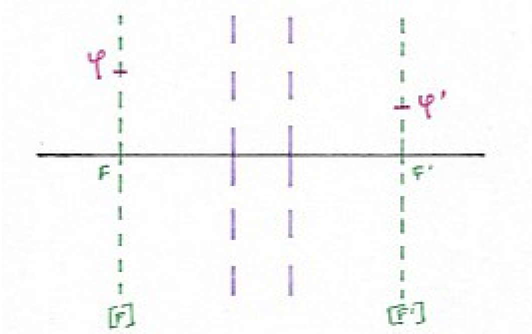


VII. Foyers secondaires :

I. Définition :

On appelle foyer secondaire objet (noté phi), tout point du plan focal objet [F] excepté F.

On appelle foyer secondaire image (noté phi'), tout point du plan focal image [F'] excepté F'.

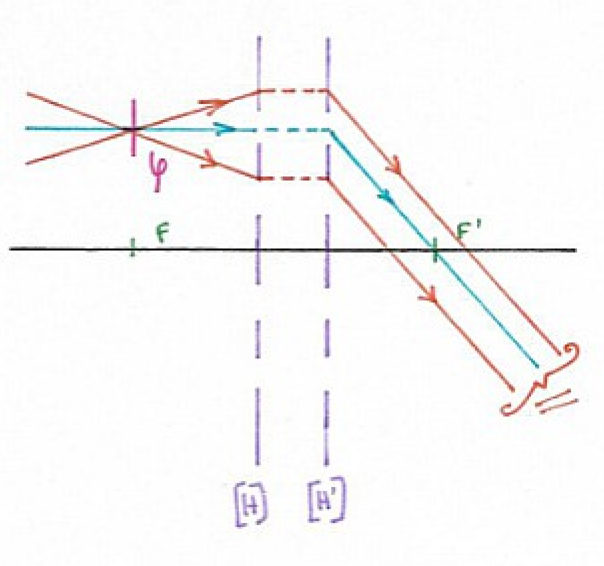


II. Propriétés des foyers secondaires objet

On utilise les propriétés établies ci-dessus dans « image à l'infini ».

Propriétés :

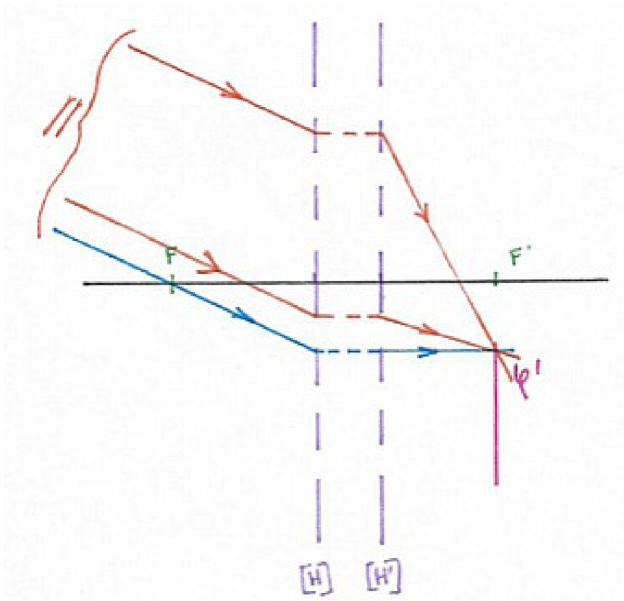
Deux rayons incidents passant par le même foyer secondaire objet (phi) ou semblant se diriger vers le même foyer secondaire objet, ressortent du système // entre eux.



III. Propriétés des foyers secondaires images :

On utilise les propriétés établies ci-dessus dans « objet à l'infini ».

Propriétés :

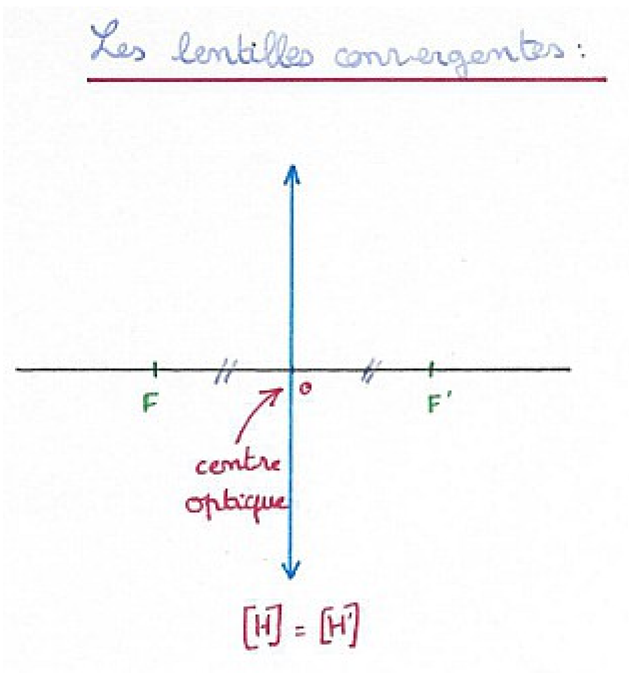


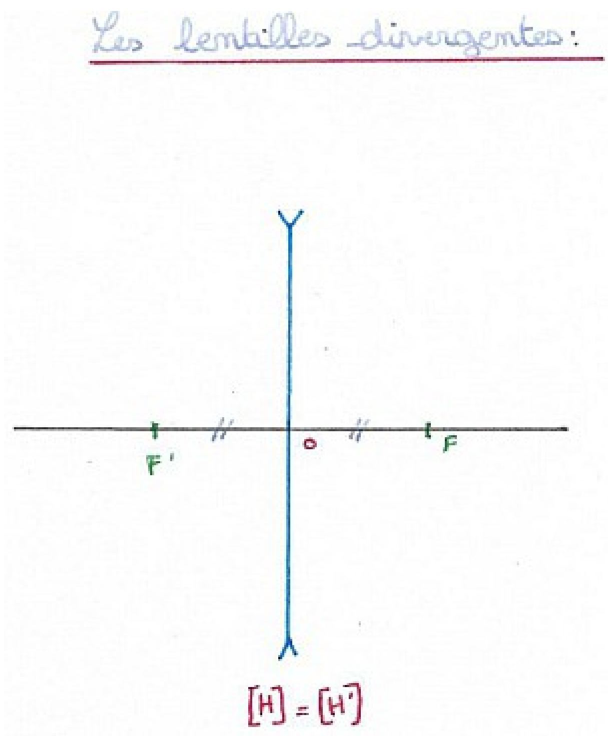
Deux rayons incidents // entre eux ressortent du système optique en passant par le même foyer secondaire image (phi') ou en semblant provenir du même foyer secondaire image.

VIII. Systèmes centrés simples : Approximation d'une lentille mince:

1. Description et caractéristiques :

L'étude des lentilles se fait généralement dans l'air.





Les lentilles minces sont assimilables à des systèmes centrés pour lesquels :

-les plans [H] et [H'] sont confondus avec la lentille

-les foyers F et F' sont symétriques par rapport au plan [H] ou [H']

II. Propriétés :

-Justifier que les foyers sont symétriques par rapport aux plans [H] et [H']
-Etablir une relation de conjugaison propre aux lentilles minces en fonction de O, A, A' et f'.
-Etablir une formule de grandissement transversal en fonction de O, A et A'.
-Déterminer en justifiant la position des point nodaux pour une lentille mince.

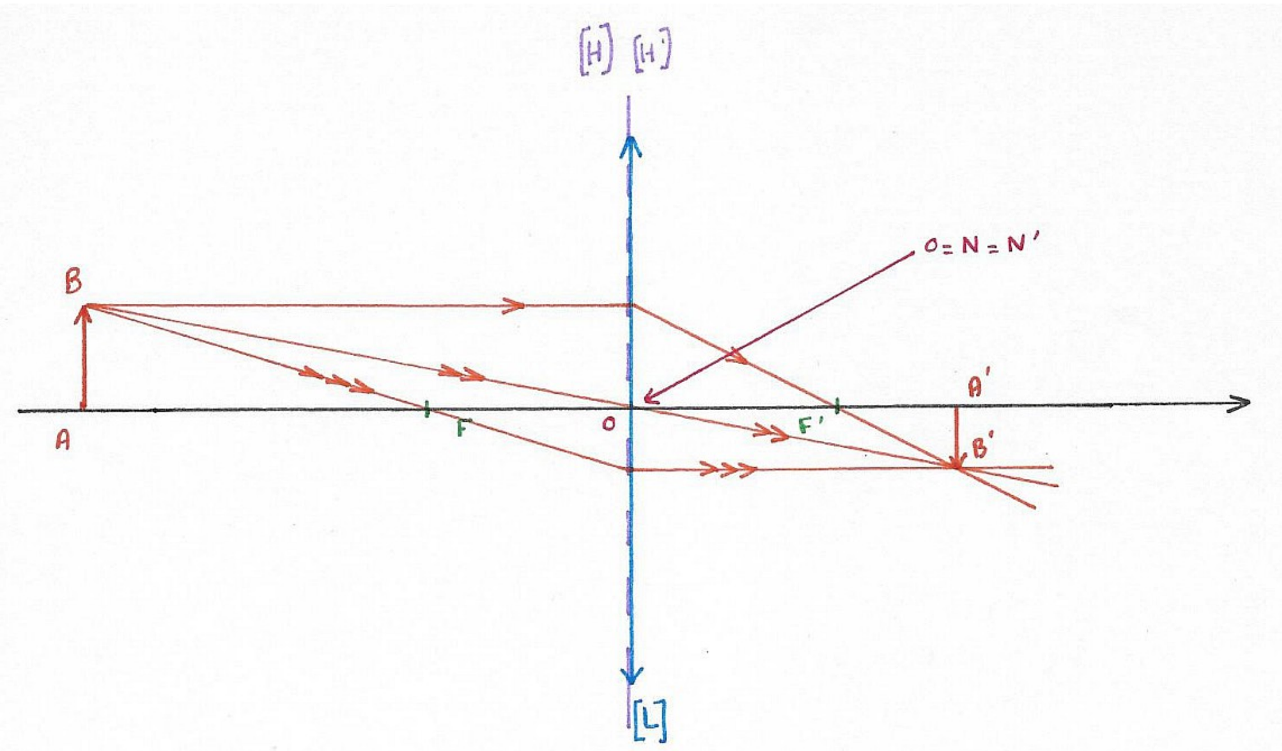
a. D=n'/f' ==> D=1/f' et D=-n/f ==> D=-1/f
1/f' = -1/f donc f et f' sont symétriques ==> H'F' = -HF
F et F' sont symétriques par rapport à O=H=H'

b. D=n'//H'A' – n//HA
D= 1/f', n'=1, n=1, H=H'=O ==> 1//OA' – 1//OA = 1/f'

c. Gt = n/n' x H'A'//HA
n = n' = 1 H' = O H = O

Gt = OA'//OA

*Remarque: les formules de Newton F'A' x FA = f x f', Gt= -F'A'/f', Gt= -f//FA, sont directement applicables aux lentilles minces également.



d. Points nodaux :

NN' = HH' or H=H'
NN'= 0 ==> N=N'
F'N'=HF
FN=H'N'
or H'F' = -HF
F'N'=-FN
N=N' ==> F'N = -FN

F et F' sont symétriques par rapport à N=N' or ils sont symétriques par rapport à O ==> N=N'=O.